Concours Centrale - Supélec 1993

Épreuve : MATHEMATIQUES I — Option MP'

Dans tout le problème f désigne une application de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$.

Partie I -

Dans cette partie on suppose que f est continue, décroissante et de limite nulle en $+\infty$. Pour $x > 0$, $k \geq 0$, $n \geq 0$, k et n entiers, on pose :

$$c_k(x) = f(x+k) - \int_{x+k}^{x+k+1} f(t)dt \qquad C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x)$$

$$d_k(x) = f(x+k+1) - \int_{x+k}^{x+k+1} f(t)dt \qquad D_n(x) = \sum_{k=0}^{n} d_k(x)$$

I.1)

a) Interpréter géométriquement $c_k(x)$ et $C_n(x)$.

b) Établir l'inégalité $c_k(x) \leq f(x+k) - f(x+k+1)$.

En déduire que la série de terme général $c_k(x)$ converge pour tout $x > 0$ et que sa somme

$$C(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(x)$$

vérifie l'inégalité $C(x) \leq f(x)$.

I.2) Après en avoir justifié l'existence, déterminer $C(x)$ dans chacun des deux cas suivants :

a) $f(x) = e^{-x}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$

I.3) Montrer que la série de terme général $d_k(x)$ converge pour tout $x > 0$ et exprimer sa somme

$$D(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k(x)$$

au moyen de $C(x)$ et de $f(x)$.

I.4)

a) Montrer que la fonction $C : x \to C(x)$ est continue sur $]0,+\infty[$.

b) Étudier le comportement de C en $+\infty$.

I.5) On suppose dans cette seule question que $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$

a) Montrer que :

$$\int_{x}^{x+1} f(t)dt$$

est négligeable devant $f(x)$ quand x tend vers 0.

b) En déduire que $C(x)$ et $f(x)$ sont équivalents quand x tend vers 0.

Partie II -

Dans cette partie, on conserve les hypothèses faites sur f dans l'introduction de la Partie I, auxquelles on ajoute l'hypothèse supplémentaire suivante : f est de classe $\mathscr{C}^1$ et convexe, c'est-à-dire à dérivée f' croissante.

II.1) Montrer que $f'(x)$ a une limite, que l'on précisera, lorsque x tend vers $+\infty$.

II.2) Montrer que la fonction C est de classe $\mathscr{C}^1$ et décroissante (on pourra utiliser la fonction $g = -f'$).

II.3) Pour $x > 0$ et k entier, on pose :

$$u_k(x) = \frac{1}{2}[f(x+k) + f(x+k+1)] - \int_{x+k}^{x+k+1} f(t)\,dt, \qquad k \geq 0$$

$$v_k(x) = f(x+k) - \int_{x+k-\frac{1}{2}}^{x+k+\frac{1}{2}} f(t)\,dt, \qquad k \geq 1$$

a) Interpréter géométriquement $u_k(x)$ et $v_k(x)$.

b) Montrer que pour tout $x > 0$ les séries de termes généraux $u_k(x)$ et $v_k(x)$ sont convergentes et exprimer leurs sommes

$$U(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x) \text{ et } V(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} v_k(x)$$

au moyen de $C(x)$ et de $f(x)$.

II.4) Montrer que pour $x > 0$ on a :

$$\frac{1}{2}f(x) \leq C(x) \leq f(x) - \int_x^{x+\frac{1}{2}} f(t)\,dt.$$

II.5)

a) Montrer que, quand x tend vers $+\infty$, les conditions suivantes sont équivalentes :

i/ $f'(x)$ est négligeable devant $f(x)$.

ii/ $f(x)$ et $f(x+1)$ sont équivalents.

b) Les conditions i) et ii) étant supposées remplies, montrer que, quand x tend vers $+\infty$, on a :

$$C(x) \sim \frac{1}{2}f(x)$$

c) Donner un exemple de fonction f satisfaisant à ces conditions.

II.6)

a) Pour $f(x) = e^{-x}$, que peut-on dire du rapport $\dfrac{C(x)}{f(x)}$?

b) Montrer que, pour tout $m \in \left]1/2, 1\right[$, il existe une fonction f telle que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{C(x)}{f(x)} = m$$

Partie III -

Dans cette partie, où f vérifie les hypothèses de l'introduction de la Partie I, on utilisera, *sans le démontrer, le résultat classique suivant :*

la suite de terme général

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n \qquad (n \geq 1)$$

admet une limite finie $\lambda\ (0 < \lambda < 1)$, appelée constante d'Euler, lorsque n tend vers $+\infty$.

On pose, pour $x > 0$, $k \geq 0$, $n \geq 0$, k et n entiers :

$$\gamma_k(x) = xf((k+1)x) - \int_{(k+1)x}^{(k+2)x} f(t)\,dt, \qquad \Gamma_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k(x)$$

$$\delta_k(x) = xf((k+2)x) - \int_{(k+1)x}^{(k+2)x} f(t)\,dt, \qquad \Delta_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \delta_k(x)$$

III.1)

a) Interpréter géométriquement $\gamma_k(x)$ et $\Gamma_n(x)$.

b) En posant $f_x(u) = xf(ux)$, montrer que la série de terme général $\gamma_k(x)$ converge pour tout $x > 0$ et que sa somme

$$\Gamma(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \gamma_k(x)$$

est une fonction continue de x sur $\left]0, +\infty\right[$.

III.2) Montrer que la série de terme général $\delta_k(x)$ converge pour tout $x > 0$.
Calculer sa somme

$$\Delta(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k(x)$$

en fonction de $\Gamma(x)$ et de $f(x)$.

III.3) On suppose dans cette question que $xf(x)$ a une limite finie, A, quand x tend vers 0.

Montrer que $\Gamma(x)$ tend vers $A\lambda$ quand x tend vers 0.

III.4) On suppose dans cette question que

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x}.$$

a) Montrer que

$$\Gamma(x) = -\ln(1 - e^{-x}) - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

b) Montrer que

$$\ln x + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

admet une limite, que l'on déterminera, lorsque x tend vers 0.

c) Montrer que la série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-(x+k)}}{x+k} \text{ converge normalement sur } [0,+\infty[.$$

d) Donner un développement asymptotique à trois termes significatifs de $C(x)$ (C a été définie en I) lorsque x tend vers 0.

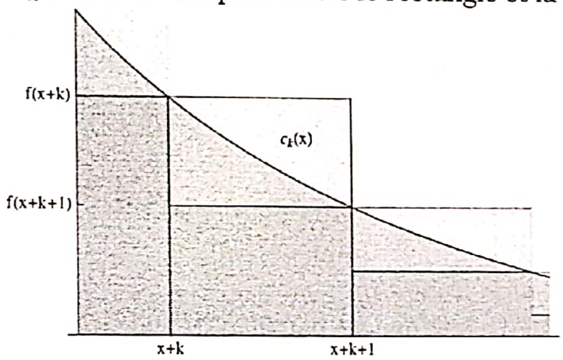
••• FIN •••

ECP 93 .- Comparaisons fines séries - intégrales

14 septembre 2007

1 Restes

1a) c_k est l' aire comprise entre le rectangle et la courbe dans le dessin ci-dessous :



C_k est la somme de ces rognures.

1b) Cette inégalité visible sur le dessin (la rognure est DANS le rectangle...) résulte de la décroissance de f ; en effet,

$$\int_{x+k}^{x+k+1} f(t)\,dt \geqslant \int_{x+k}^{x+k+1} f(x+k+1)\,dt = f(x+k+1)$$

Il est nécessaire de remarquer que, pour des raisons similaires,

$$\int_{x+k}^{x+k+1} f(t)\,dt \leqslant f(x+k)$$

Finalement, $0 \leqslant c_k \leqslant f(x+h) - f(x+k+1)$; comme on a supposé que f tend vers 0 en $+\infty$, ceci est le terme général d'une série télescopique convergente, avec

$$C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \big(f(x+h) - f(x+k+1)\big) = f(x)$$

2) Ces deux fonctions sont continues, décroissantes, de limite nulle en $+\infty$ donc ça marche comme ci-dessus. On calcule

a) $c_k(x) = e^{-x-k} - \displaystyle\int_{x+k}^{x+k+1} e^{-t}\,dt = e^{-x-k-1}$; $C(x) = \dfrac{e^{-x}}{e-1}$.

b) $c_k(x) = \dfrac{1}{(x+k)(x+k+1)} - \displaystyle\int_{x+k}^{x+k+1} \frac{dt}{t(t+1)} = \frac{1}{(x+k)(x+k+1)} - \ln \frac{(x+k+1)^2}{(x+k)(x+k+2)}$.

On en tire

$$\begin{aligned} C(x) &= \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{(x+k)(x+k+1)} - \sum_{k\geqslant 0} \ln \frac{(x+k+1)^2}{(x+k)(x+k+2)} \\ &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \dots\right) - \ln \frac{(x+1)^2(x+2)^2(x+3)^2\dots}{x(x+2)(x+1)(x+3)(x+2)(x+4)\dots} = \frac{1}{x} - \ln\frac{x+1}{x} \end{aligned}$$

en repassant prudemment aux sommes partielles pour vérifier les télescopages.

3) On montrerait de même l'existence de $D(x)$. Il est plus rapide de remarquer que

$$c_k - d_k = f(x+k) - f(x+k+1), \quad \text{terme général de série convergente.}$$

Donc $D(x)$ existe, et par surcroît vaut

$$D(x) = C(x) - \sum_{k\geqslant 0}\big(f(x+k) - f(x+k+1)\big) = C(x) - f(x) \leqslant 0$$

4) Cette question sent fort la convergence uniforme... En effet, chaque fonction c_k est continue comme différence de fonctions continues (ou mieux) ; et sur l'intervalle $[a, a+1]$ on a

$$0 \leqslant c_k(x) \leqslant f(x+k) - f(x+k+1) \leqslant f(a+k) - f(a+1+k+1) = f(a+k) - f(a+k+2), \text{ terme d'une série convergente.}$$

Ce n'est pas très élégant mais cela implique la continuité de la somme $C(x)$ sur tous ces intervalles $[a, a+1]$ et partant, sur $\mathbb{R}_+^*$.
Le comportement de $C(x)$ en $+\infty$ résulte trivialement de l'encadrement connu $0 \leqslant C(x) \leqslant f(x)$ puisque $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

5a) Soit $\varepsilon > 0$ donné ; on a

$$\int_x^{x+1} f(t)\,dt = \int_x^{x+\varepsilon} f(t)\,dt + \int_{x+\varepsilon}^{x+1} f(t)\,dt \leqslant \int_x^{x+\varepsilon} f(x)\,dt + \int_{x+\varepsilon}^{x+1} f(x+\varepsilon)\,dt = \varepsilon f(x) + (1-\varepsilon) f(x+\varepsilon) \leqslant \varepsilon f(x) + f(\varepsilon)$$

Ceci montre bien (puisque $f(x) \to \infty$) que $\int_x^{x+1} f(t)\,dt$ est négligeable devant $f(x)$.

b) Autrement dit, $c_0(x) \sim f(x)$; comme le reste de la somme $\sum_{k\geqslant 1} c_k(x)$ est majoré par $f(x+1)$ (calcul similaire au **1b)**) qui est majoré par la constante $f(1)$, on a bien $C(x) \sim f(x) \to +\infty$.

2 La convexité en plus

1) f' est croissante, et négative puisque f décroît, donc converge. Soit ℓ sa limite ; si elle était < 0, on a $\forall t > 0$ $f'(t) \leqslant \ell$ et par intégration,

$$f(x) = f(1) + \int_1^x f' \leqslant f(1) + \ell \times (x-1) \to -\infty \quad \text{quand } x \to +\infty$$

ce qui n'est pas.

2) Je n'utilise pas l'indication de l'énoncé. On calcule $c_k'(x) = f'(x+k) - f(x+k+1) + f(x+k)$. Par le théorème des accroissements finis, $\exists \theta \in]0,1[$ $f(x+k+1) - f(x+k) = f(x+k+\theta)$: donc $c_k'(x) \leqslant 0$. On a déjà vu que $-f(x+k+1) + f(x+k) \geqslant 0$ est le terme d'une série de fonctions normalement convergente sur tout compact. Mais comme

$$0 \geqslant c_k'(x) \geqslant f'(x+k) \geqslant f(x+k) - f(x+k-1)$$

par une application similaire du théorème des accroissements finis, on a $|c_k'(x)| \leqslant f(x+k-1) - f(x+k)$, terme général d' une série normalement convergente [sur tout compact] comme on l'a vu.
On peut enfin appliquer le théorème de dérivation terme à terme. Il entraîne que C est de classe $\mathcal{C}^1$ et $C'(x) = \sum_{k\geqslant 0} c_k'(x) \leqslant 0$.

3a) u_k est la différence entre l'aire délimitée par la courbe et celle du trapèze correspondant ; v_k est la différence entre l'aire du rectangle et celle délimitée par la courbe entre les $x+k\pm 1/2$. On reconnaît les idées des méthodes d'intégration approchée dites des trapèzes, et des rectangles médians. Cf. figures infra.

3b) Prenons les sommes partielles : on a $C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x+k) - \int_x^{x+n+1} f(t)\,dt$, et donc

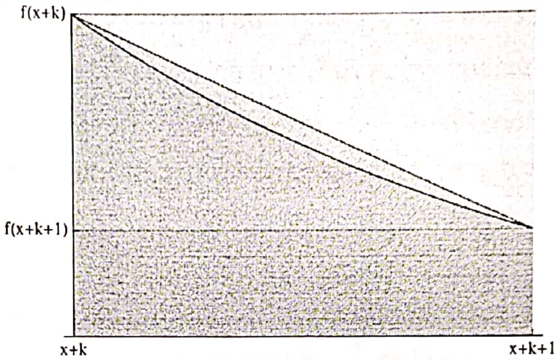
$$U_n(x) = (u_0 + \dots u_n)(x) = \frac{1}{2}f(x) + \sum_{k=1}^{n} f(x+k) + \frac{1}{2}f(x+n+1) - \int_x^{x+n+1} f(t)\,dt = C_n(x) - \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x+n+1)$$

et tout ceci converge bien vers $U(x) = C(x) - \frac{1}{2}f(x)$.
De même, mais en interprétant libéralement l'énoncé,

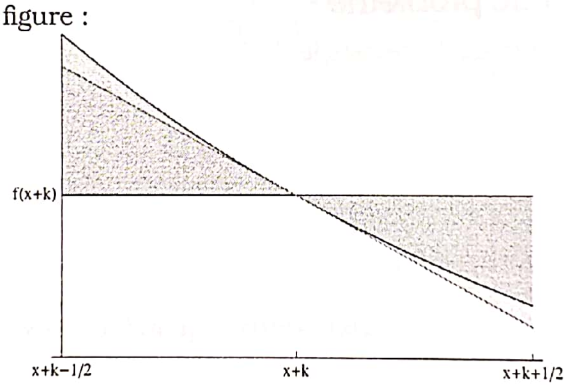
$$V_n(x) = (v_1 + \dots v_n)(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x+k) - \int_{x+1/2}^{x+n+1/2} f(t)\,dt = C_n(x) - f(x) + \int_x^{x+1/2} f(t)\,dt - \int_{x+n}^{x+n+1/2} f(t)\,dt$$

Comme $\int_{x+n}^{x+n+1/2} f(t)\,dt \leqslant \frac{f(x+n)}{2} \to 0$, il reste $V(x) = C(x) - f(x) + \int_x^{x+1/2} f(t)\,dt$.

4) On nous demande en fait de montrer que $\forall x\ V(x) \leqslant 0 \leqslant U(x)$. Cela résulte, pour $U(x)$, de ce que le terme général $u_k(x)$ est toujours positif comme on le voit en l'interprétant comme l'aire comprise entre le haut du trapèze et la courbe :



Pour $V(x)$ on a une autre figure :



et on veut arguer que la partie de la courbe située au dessus du rectangle prend le pas sur la partie située dessous, i.e (cela équivaut à $v_k(x) \geqslant 0$) que

$$\int_{x+k-1/2}^{x+k} f(t) - f(x+k)\,dt \geqslant \int_{x+k}^{x+k+1/2} f(x+k) - f(t)\,dt$$

On l'obtient facilement en rappellant qu'une fonction convexe a un graphe au dessus de sa tangente, ce qui permet de comparer des deux quantités à deux triangles isométriques (cf. figure précédente) et de conclure. Par le calcul c'est beaucoup moins clair : il faut arguer que sur $[x+k-\frac{1}{2}, x+k]$ par exemple, la courbe est située au dessus de la droite d'équation $y = g(t) = f(x+k) + f'(x+k)(t-x)$ [par convexité] ; en intégrant la relation $f(t) \geqslant g(t)$ on trouve que

$$\int_{x+k-1/2}^{x+k} f(t) - f(x+k)\,dt \geqslant -\frac{1}{2}f'(x+k) \text{ (aire du triangle)} \geqslant \int_{x+k}^{x+k+1/2} f(x+k) - f(t)\,dt$$

(on a obtenu l'autre inégalité de façon similaire). Il en résulte immédiatement que $v_k(x) \leqslant 0$.
Comme souvent dans les problèmes de Centrale, un dessin est indispensable, même pour calculer.

5a) Rappelons (sinon l'énoncé n'a pas de sens) que f est supposée convexe, décroissant vers 0. Si f' est négligeable devant f, alors avec le théorème des accroissements finis

$$0 \leqslant f(x) - f(x+1) = -f'(x+\theta) \leqslant -f'(x) = o(f(x))$$

Réciproquement, si $f(x) - f(x+1) = -f'(x+\theta) = o(f(x))$ on en déduit que $f'(x+1)$ est négligeable devant $f(x)$, et donc *a fortiori* devant $f(x+1) \geqslant f(x)$, ce qui revient à dire que $f' = o(f)$.

5b) Supposons que c'est le cas ; alors

$$\frac{1}{2}f(x) \sim \frac{1}{2}f(x+1) \leqslant \frac{1}{2}f(x+1/2) = \int_x^{x+1/2} f(x+1/2)\,dt \leqslant \int_x^{x+1/2} f(t)\,dt \leqslant \int_x^{x+1/2} f(x)\,dt = \frac{1}{2}f(x)$$

ce qui prouve que $\int_x^{x+1/2} f(t)\,dt \sim \frac{1}{2}f(x)$. Avec l'encadrement du **4)** on en tire $C(x) \sim \frac{1}{2}f(x)$.

5c La fonction proposée au début $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$ fait l'affaire. Observons qu'alors,

$$\sum_{k\geqslant 1} f(x+k) = \frac{1}{x}, C(x) = \frac{1}{x} - \ln(1+\frac{1}{x})$$

et effectivement, $C(x) \sim \dfrac{1}{2x^2} \sim \dfrac{1}{2}f(x)$ quand $x \to +\infty$.

6) Dans ce cas, les conditions précédentes ne sont pas vérifiées ($f(x+1)$ ne vaut qu'une fraction de $f(x)$). On a en fait

$$\frac{C(x)}{f(x)} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}(e-1)} \to \frac{1}{e-1}$$

En prenant du α^x au lieu de e^x, on pourrait obtenir ainsi n'importe quelle limite (> 0 quand même).

3 Constante d'Eulerisation du problème

1a) On a encore pour γ_k la différence entre le rectangle de base $[(k+1)x, (k+2)x]$ et de hauteur $f((k+1)x)$, et l'aire délimitée par la courbe de f sur le même intervalle. Pour Γ_n c'est pareil mais sur $[x, (n+2)x]$.

De même pour δ, Δ mais avec le(s) rectangle(s) situé(s) en dessous de la courbe.

1b) Poser $f_x(u) = x f(ux)$ nous ramène, à un facteur x près, à la partie I (en remplaçant $f(x)$ par $f_x(u)$) dont les conclusions restent valides.

2) On peut, là aussi, se ramener aux questions déjà faites, ou repasser aux sommes partielles comme en **I.3)** :

$$\Gamma_n(x) - \Delta_n(x) = x f(x) - x f((n+2)x) \to x\, f(x) \quad \text{quand } n \to +\infty$$

De toute façon on trouve

$$\Delta(x) = \Gamma(x) - x f(x)$$

3) Je ne vois pas comment faire cette question en la déduisant de questions précédentes. Intuitivement c'est « évident » (sic !) : si $f(x) \sim A/x$, on a $\gamma_k(x) \approx \dfrac{A}{k+1} - A\ln(1+\dfrac{1}{k+1})$ et on vérifie aisément que la somme de ces termes donne la constante d'Euler.

On peut mettre en forme ceci, en exprimant que $\left|f(t) - \frac{A}{t}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{t}$ pour $0 < t < \alpha$; mais c'est long et lourd...

5a) D'abord observons que cette fonction décroît, est continue, tend vers 0 en ∞ et que $x f(x) \to 1$ en 0.

Comme la série des $x f((k+1)x) = \dfrac{e^{-(k+1)x}}{k+1}$ converge, on trouve aisément (en reconnaissant le DSE classique de $\ln(1-t)$) $\Gamma(x) = -\ln(1-e^{-x}) - \int_x^\infty \dfrac{e^{-t}}{t}\,dt$.

5b) On a $\Gamma(x) \to \lambda$ quand $x \to 0$, d'après la question **3)**.

Mais comme $\ln(x) - \ln(1-e^{-x}) = -\ln\frac{1-e^{-x}}{x} \to 0$, cela donne bien

$$\ln x + \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \to -\lambda$$

(c'est d'ailleurs une bonne méthode pour calculer **numériquement** λ)

c) Le terme général est en effet majoré par e^{-k}. Pour ceux qui sont arrivés ici, c'est une question triviale... enfin...

d)

$$C(x) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{e^{-x-k}}{x+k} - \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$$

On a (**4 b)**) un développement à deux termes de l'intégrale :

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt = -\ln x - \gamma + o(1)$$

mais pour le $\sum$ c'est autre chose. On a certes (par continuité, vue au **I**)

$$\sum_{k\geqslant 0} \frac{e^{-x-k}}{x+k} = \frac{e^{-x}}{x} + \sum_{k\geqslant 1} \frac{e^{-x-k}}{x+k} = \frac{e^{-x}}{x} + \sum_{k\geqslant 1} \frac{e^{-k}}{k} + o(1) = \frac{1}{x} - 1 - \log\left(1 - \frac{1}{e}\right) + o(1)$$

et cela donne

$$C(x) = \frac{1}{x} + \ln x - 1 + \lambda - \log\left(1 - \frac{1}{e}\right) + o(1)$$

C'est sans doute le développement demandé, puisque $\frac{1}{x} \gg \ln x \gg C^{te}$. Une vérification numérique (où 30 est une bonne approximation de l'infini...) :

```
c(x_) := NSum[e^(-k-x)/(k+x), {k, 0, 30}] - ∫_x^30 e^(-t)/t dt

d(x_) := N[-log(1 - 1/e) + log(x) + 1/x + γ - 1]

{c(0.001), d(0.001)}

{993.126769, 993.12813}
```